

Introduction au traitement numérique du signal

Vers son utilisation en arithmétique entière

Olivier Sentieys

sentieys@enssat.fr

ENSSAT — Université de Rennes 1

IRISA — Équipe de recherche R^2D^2



Agenda

Introduction et classification des signaux

1. Échantillonnage et reconstruction des signaux

2. Signaux à temps discret

Quelques outils du traitement du signal

3. Transformation en Z

4. Transformation de Fourier

Quelques applications typiques en traitement du signal

5. Systèmes discrets

6. Filtrage numérique

7. Transformée de Fourier rapide (FFT)

8. Filtrage adaptatif

9. Quantification et arithmétique entière

Définitions

- **Modéliser** – ou identifier – consiste en l'analyse d'un signal ou d'un système, dans le domaine temporel ou fréquentiel (i.e. spectral). On parlera également d'estimation.
- **Synthétiser** – ou générer – un signal.
- **Transmettre** un ensemble de signaux sur un support.
- **Transformer** un ensemble de signaux à l'aide d'un système
 - linéaire : filtrer, moduler, coder, ...
 - ou non linéaire : $()^2$, $||$, ...

Classification des signaux et systèmes

- **Dimension du signal**

- Signal scalaire pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes : $x(t)$.
- Signal vectoriel pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes : $[R, V, B] = TV(t)$.

- **Dimension des variables du signal**

- Signal mono-dimensionnel qui correspond à des fonctions à un seul argument, comme par exemple le temps.
- Signal multi-dimensionnel qui correspond à des fonctions à plusieurs arguments : $[I] = TV(t, x, y)$.

Classification des signaux et systèmes

Caractéristiques temporelles

- Signaux à temps continu ou signaux *analogiques* : $s(t)$. La variable $t \in \mathbb{R}$.
- Signaux à temps discret : $s(n)$ (ou $s(nT)$). La variable $n \in \mathbb{Z}$. Ces signaux sont *définis* pour certaines valeurs de la variable t : $s(n) = s(nT) = s(t)|_{t=nT}$.

Classification des signaux et systèmes

Valeurs prises par le signal

- Signaux à valeurs continues pouvant prendre une valeur réelle dans un intervalle continu.
- Signaux à valeurs discrètes prenant seulement des valeurs parmi un ensemble fini de valeurs possibles (i.e. quantification).

Classification des signaux et systèmes

Prédictibilité des signaux

- Signaux déterministes qui peuvent être représentés explicitement par une fonction mathématique.
- Signaux aléatoires qui évoluent dans le temps d'une manière imprévisible. Il est cependant possible de décrire mathématiquement certaines caractéristiques statistiques de ces signaux.

1 Échantillonnage et reconstruction des signaux

Théorème d'échantillonnage de Shannon

Historique du Théorème d'échantillonnage - I

De tout temps, l'Homme a cherché à échantillonner ... ^a

1918 E.T. Whittaker s'intéresse aux représentations analytiques d'une fonction connue seulement pour des valeurs équidistantes : $a, a + w, a + 2w, \dots, a + nw$

Ceci l'a conduit à la forme finale de la série cardinale :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a + nw) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{w}(t - a - nw)\right)}{\frac{\pi}{w}(t - a - nw)}$$

^aMerci à Simon Mathieu de l'Université Laval pour cet historique précis

Historique du Théorème d'échantillonnage - I

De tout temps, l'Homme a cherché à échantillonner ...^a

1918 E.T. Whittaker s'intéresse aux représentations analytiques d'une fonction connue seulement pour des valeurs équidistantes : $a, a + w, a + 2w, \dots, a + nw$
Ceci l'a conduit à la forme finale de la série cardinale :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a + nw) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{w}(t - a - nw)\right)}{\frac{\pi}{w}(t - a - nw)}$$

1928 Nyquist s'intéresse à la communication télégraphique. La vitesse d'échantillonnage de Nyquist correspond à la vitesse minimale pour laquelle on peut obtenir une reconstruction stable.

^aMerci à Simon Mathieu de l'Université Laval pour cet historique précis

Historique du Théorème - II

1933 Kotel'nikov a introduit ce théorème dans la littérature scientifique russe.

Historique du Théorème - II

1933 Kotel'nikov a introduit ce théorème dans la littérature scientifique russe.

1948 Shannon énonce un théorème qui selon lui est généralement admis dans le domaine des communications :

Whittaker Kotel'nikov Shannon — WKS

Si une fonction $f(t)$ ne contient pas de fréquences supérieures à ω_{max} en radians par seconde, alors elle est complètement déterminée par l'ordonnée d'une série de points espacés de $T = \frac{\pi}{\omega_{max}}$ secondes.

Ce théorème prend sa source dans les travaux de Borel, Cauchy et De La Vallée Poussin au milieu du XIX^e siècle.

Reconstruction

Classe de fonctions de Paley-Wiener (largeur de bande limitée) regroupe les fonctions telles que :

$$PW_B = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subseteq [-\sigma, \sigma] \right\},$$

où \hat{f} est la transformée de Fourier définie dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e. la définition usuelle de la transformée et $\text{supp } \hat{f}$ est le plus petit support de \hat{f} . Le théorème nous conduit à la série cardinale utilisée pour reconstruire la fonction originale :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{w}\right) \text{sinc}\left(t - \frac{n}{w}\right) \quad (1)$$

Théorème d'échantillonnage de Shannon

Il est possible de reconstruire le signal continu à partir du signal discret si le signal analogique est à bande limitée, i.e. $X(\omega)$ est nulle pour $|\omega| > \omega_{\max}$

On obtient alors :

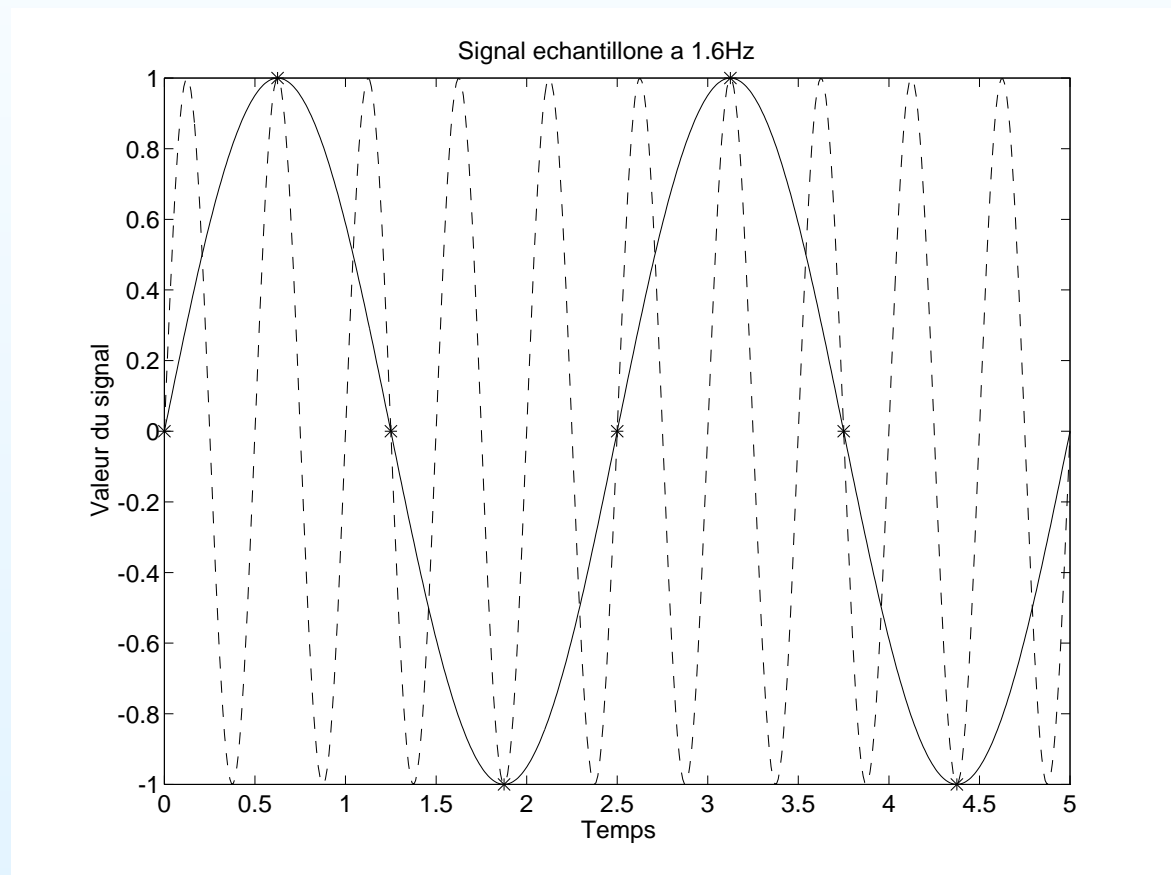
$$\omega_{\max} < \frac{2\pi}{T} - \omega_{\max} \quad (2)$$

$$2f_{\max} < f_N \quad \text{avec} \quad f_N = \frac{1}{T} \quad (3)$$

f_N est la fréquence limite d'échantillonnage ou encore appelée fréquence de Nyquist.

Exemple d'échantillonnage

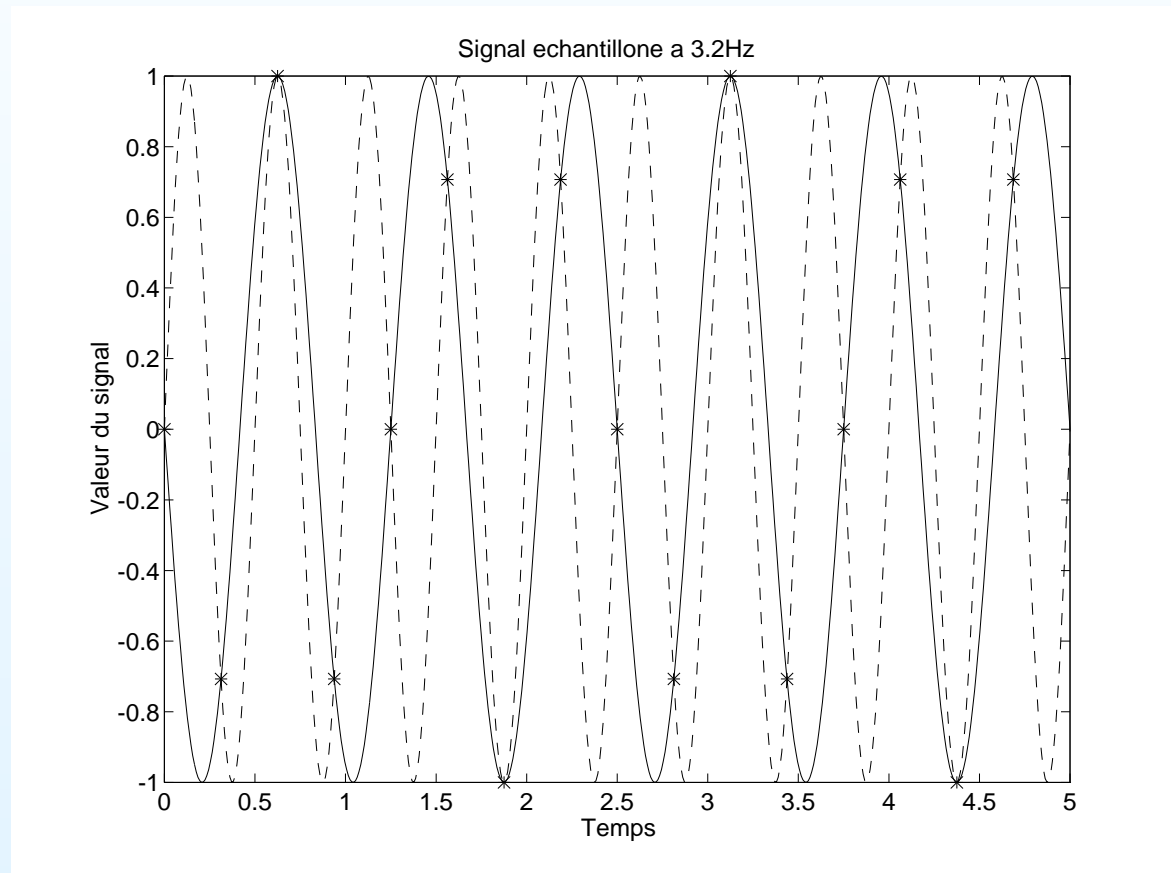
Soit $x_a(t)$ correspondant à une sinusoïde de fréquence $f = 2\text{Hz}$.
La fréquence de Nyquist correspond à $f_N = 2 \times 2 = 4\text{Hz}$.



$f_e = 1.6\text{Hz}$, reconstruction imparfaite

Exemple d'échantillonnage

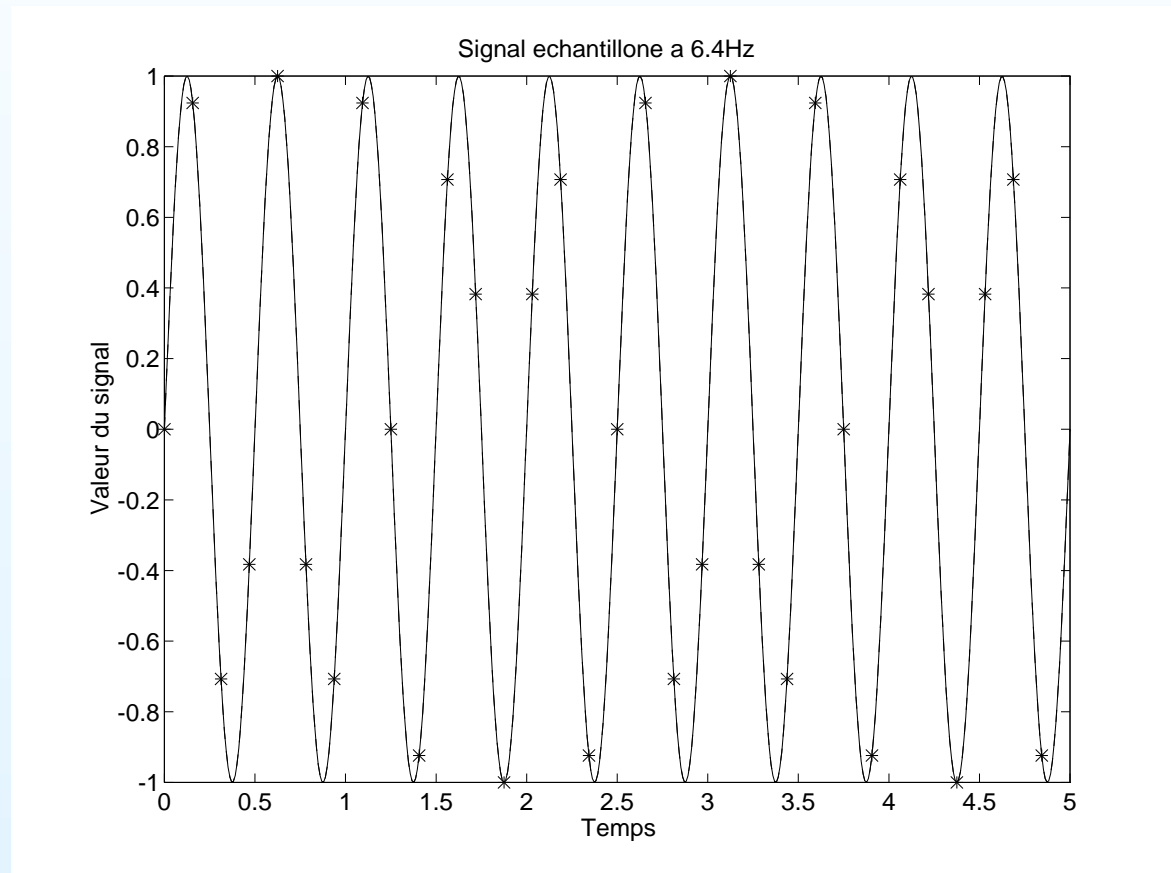
Soit $x_a(t)$ correspondant à une sinusoïde de fréquence $f = 2\text{Hz}$.
La fréquence de Nyquist correspond à $f_N = 2 \times 2 = 4\text{Hz}$.



$f_e = 3.2\text{Hz}$, reconstruction imparfaite

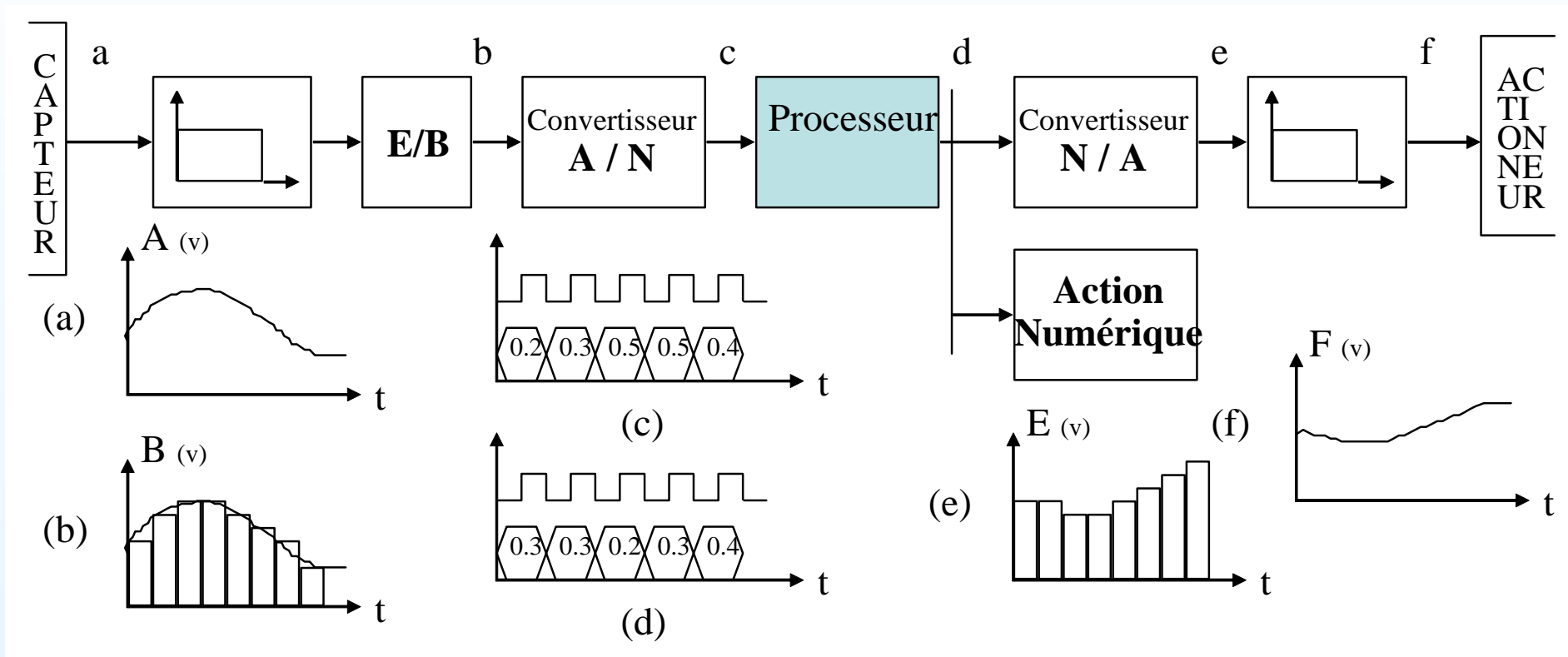
Exemple d'échantillonnage

Soit $x_a(t)$ correspondant à une sinusoïde de fréquence $f = 2\text{Hz}$.
La fréquence de Nyquist correspond à $f_N = 2 \times 2 = 4\text{Hz}$.



$f_e = 6.4\text{Hz}$, reconstruction parfaite

Chaîne de traitement



2 Signaux à temps discret

Signaux à temps discret

- Séquence \mathcal{X} de nombres dans laquelle le $n^{\text{ième}}$ nombre est $x(n)$. On écrira :

$$\mathcal{X} = \{x(n)\} \quad -\infty < n < \infty \quad n \in \mathbb{Z}$$

- $x(n)$ est égal à la valeur du signal analogique $x_a(t)$ au temps $t = nT$, i.e.

$$x(n) = x_a(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

- T : période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T}$: fréquence d'échantillonnage

Signaux à temps discret

1. Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n - k)$

2. Echelon unité

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k)$$

3. $x_1(n) = A\alpha^n$

$$x_2(n) = A\alpha^n u(n)$$

4. Sinusoïde

$$x_3(n) = A \cos(n\omega_0 T + \varphi)$$

5. Cas général

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k).$$

e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n - 2) - 0.5\delta(n - 4)$

Propriétés des signaux à temps discret

1. Signaux causaux

$$x(n) = 0, \quad \forall n < 0$$

2. Énergie totale : finie ou infinie

$$E(\infty) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (4)$$

3. Puissance moyenne : finie ou infinie

$$P_m \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |x(n)|^2 \quad (5)$$

Propriétés des signaux à temps discret – 2

5. Intercorrélation entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$

$$\mathcal{R}_{xy}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+k) = \mathcal{R}_{yx}(-k) \quad (6)$$

6. Convolution linéaire entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$

$$\varphi_{xy}(k) = x(k) * y(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(k-n) \quad (7)$$

Signaux aléatoires

Un signal est dit aléatoire si sa valeur instantanée $x(t)$ ne peut être prévue avec certitude.

- Exemple

Soient $a(\omega)$ et $\phi(\omega)$ deux variables aléatoires,

$$X(t, \omega) = a(\omega) \sin(2\pi f_0 t + \phi(\omega))$$

définit un signal aléatoire.

- Signaux de parole, mesures, théorie de l'information, ...
- Protection aux perturbations aléatoires

Statistique du premier ordre

- Fonction de répartition

$$F_X(x; t) = \text{Prob}\{X(t) \leq x\}$$

- Fonction de densité de probabilité

$$f_X(x; t) = \frac{d}{dx} F_X(x; t) \Leftrightarrow F_X(x; t) = \int_{-\infty}^x f_X(u; t) du$$

- Moments non centrés d'ordre k

$$m_k(t) = E[X^k(t)] = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x; t) dx$$

- Moments centrés d'ordre k

- $M_k(t) = E[(X(t) - E[X(t)])^k]$

- Moment centré d'ordre 2 : variance $\sigma_X^2(t)$

Outils en traitement numérique du signal

3 Transformée en Z

Transformée en Z

La transformée en Z établit une correspondance entre l'espace des signaux à temps discret et l'espace des fonctions analytiques (ou holomorphes) définies sur un sous-ensemble du plan complexe, appelé domaine de convergence \mathcal{D}_{CV} .

On définit la transformée en Z (dite unilatérale) par :

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8)$$

\mathcal{D}_{CV} correspond à l'extérieur du disque de convergence défini par $|z| > r$ avec :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = r$$

Propriétés de la TZ

1. Linéarité

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \Leftrightarrow X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

2. Théorème du retard et de l'avance

$$Z [x(n - k)] = z^{-k} X(z)$$

$$Z [x(n + k)] = z^{+k} X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{k-n}$$

3. Dérivation dans l'espace en z

$$Z [n.x(n)] = Y(z) = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

Propriétés de la TZ – 2

5. Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

6. Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z)$$

7. Théorème de la convolution linéaire discrète

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \iff X(z) = X_1(z) X_2(z)$$

Transformée en Z inverse

Soit $X(z)$ la transformée en Z du signal $x(n)$. On définit la transformée en Z inverse, la relation déterminant $x(n)$ à partir de $X(z)$ telle que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{n-1} X(z) dz \quad (9)$$

Il existe trois principales méthodes :

1. l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus,
2. le développement en puissance de z ou de z^{-1} ,
3. le développement en fractions élémentaires.

Outils en traitement numérique du signal

4 Transformée de Fourier d'un signal discret

Rappels sur les signaux continus

Soit un signal analogique $x_a(t)$ dont la transformée de Fourier est définie par :

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

avec $\omega = 2\pi f$.

On retrouve le signal temporel à partir de sa transformée par la transformée de Fourier inverse définie par la relation suivante :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (11)$$

TF d'un signal discret non périodique

Pour un signal $x(n)$ discret quelconque non périodique, sa transformée de Fourier (TF) s'écrit :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega} \quad (12)$$

$X(e^{j\Omega})$ peut être exprimée à partir de la transformée en Z par la relation :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (13)$$

TF d'un signal discret non périodique – 2

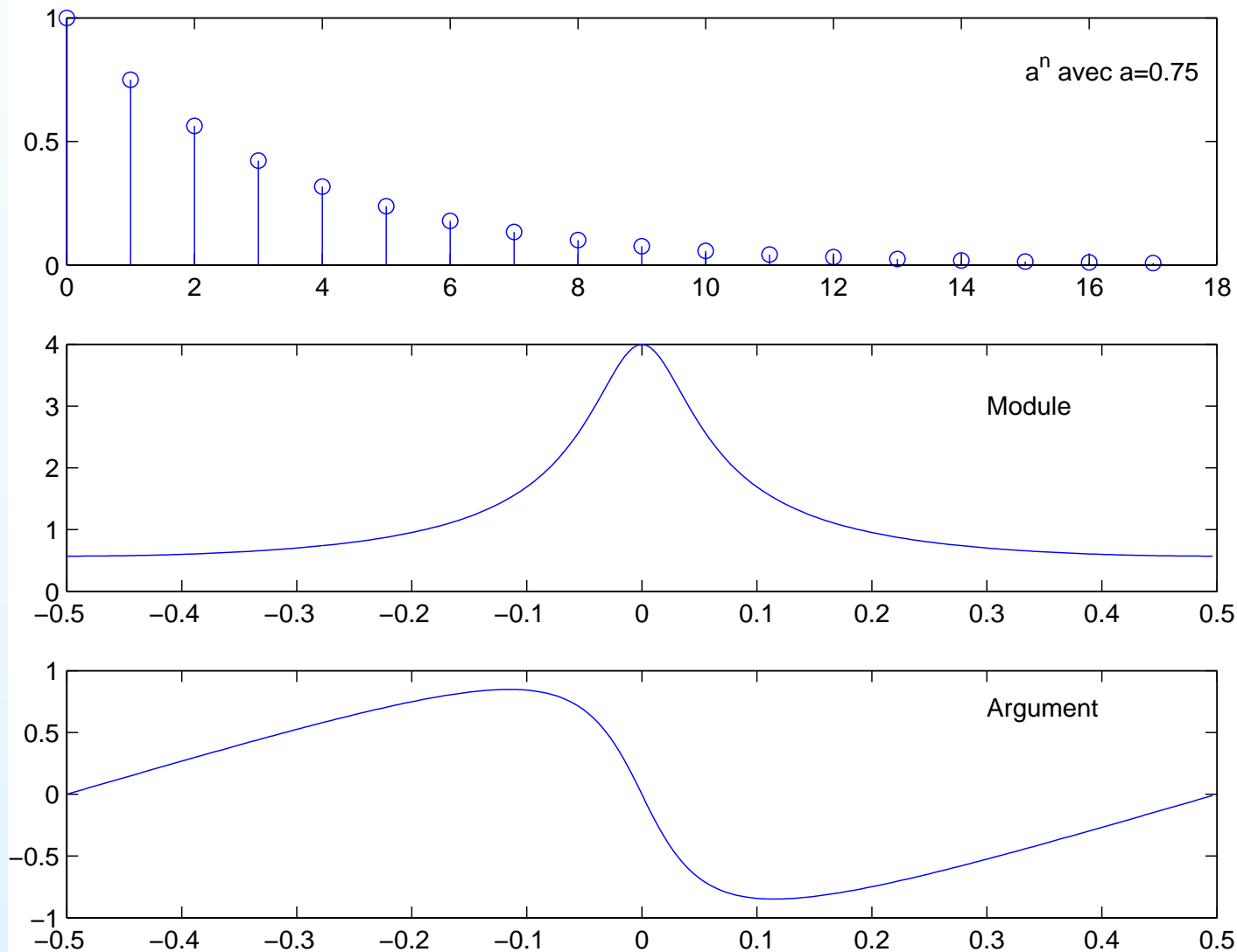
- L'équation (12) implique que le TF n'existe que si le cercle unité, caractérisé par $z = e^{j\Omega}$, appartient au domaine de convergence de $X(z)$.
- $X(\Omega)$ est *périodique* de période 2π . Ceci implique que **le spectre d'un signal discret est périodique.**

La TF inverse est obtenue à partir de la transformée en Z inverse de $X(z)$. On obtient :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \quad (14)$$

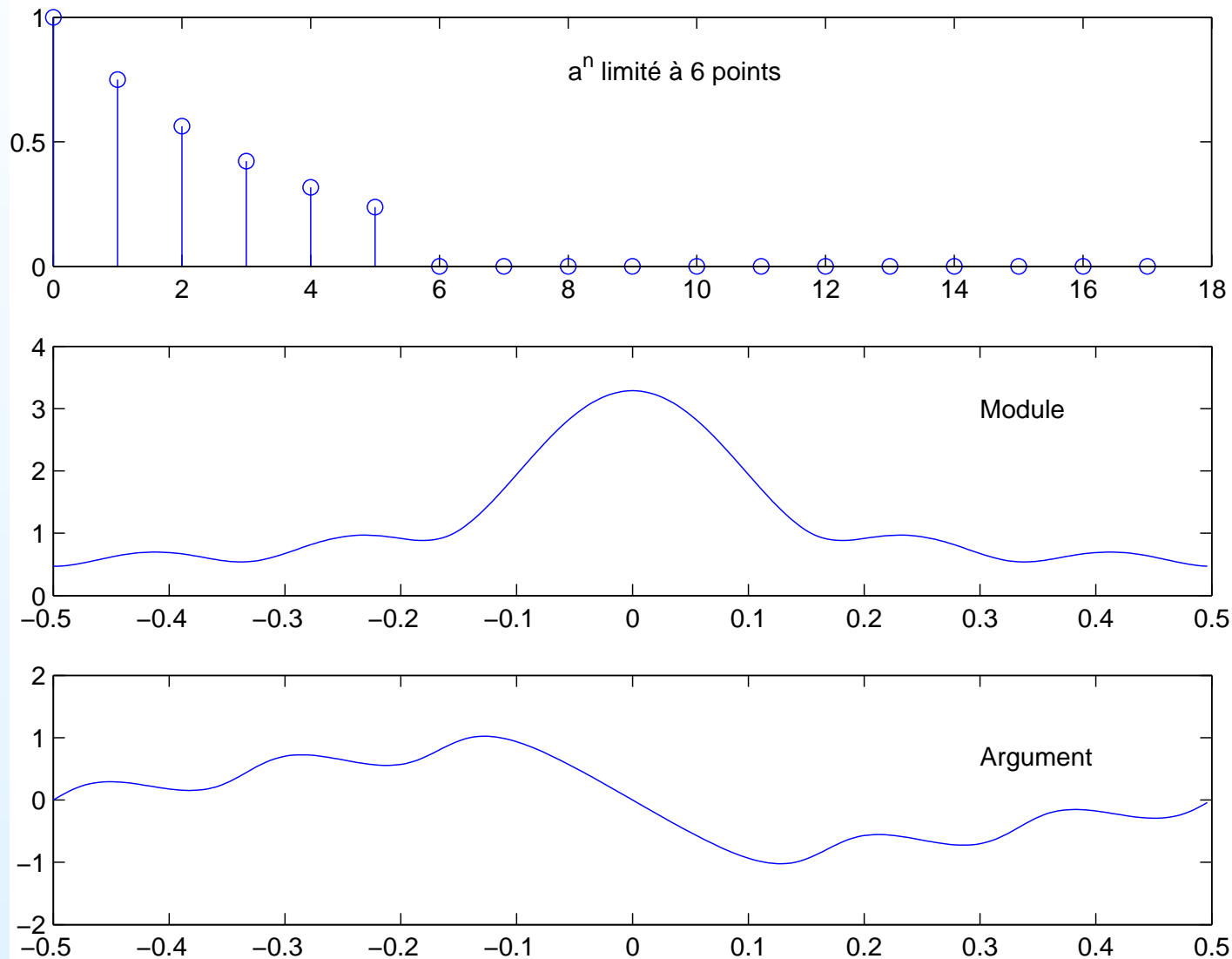
TF d'un signal discret non périodique – 3

Exemple : $x(n) = a^n u(n)$



TF d'un signal discret non périodique – 4

Exemple : $x(n) = a^n$, pour $n = 0 \dots N - 1$



TF d'un signal discret périodique

Pour un signal $x_p(n)$ discret périodique de période N , une décomposition en série de Fourier doit être utilisée sous la forme :

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n).e^{-2j\pi \frac{n.k}{N}}, \quad k = 0, 1 \dots N - 1 \quad (15)$$

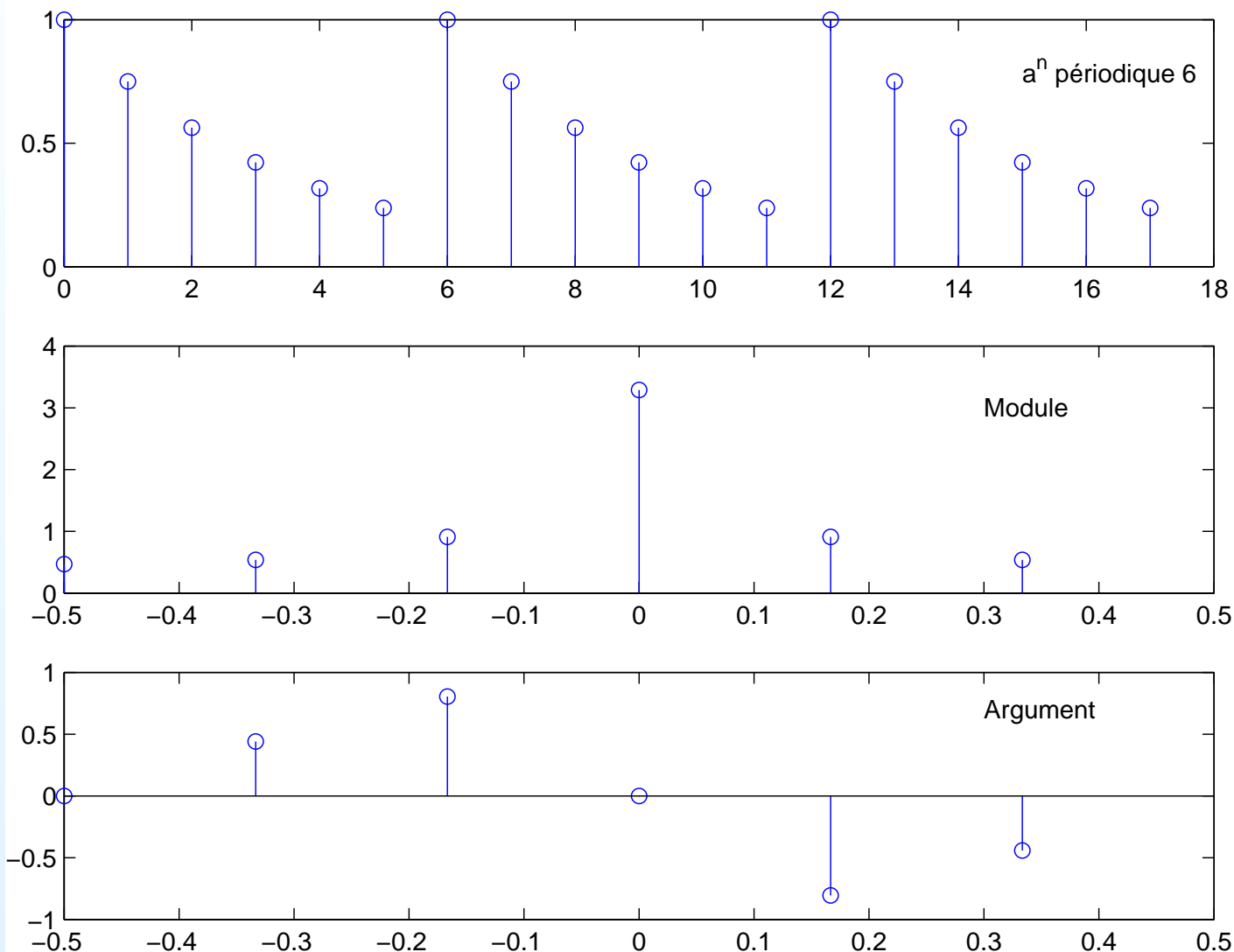
$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k).e^{2j\pi \frac{n.k}{N}}, \quad n = 0, 1 \dots N - 1 \quad (16)$$

Sa Transformée de Fourier s'écrit alors :

$$X_p(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) \delta \left(\Omega - k \frac{2\pi}{N} \right) \quad (17)$$

TF d'un signal discret périodique – 2

Exemple : $x(n) = a^n$, pour $n = 0 \dots N - 1$, périodique N



Propriétés de la transformée de Fourier

1. Linéarité ou superposition

$$a.x(n) + b.y(n) \Leftrightarrow a.X(e^{j\Omega}) + b.Y(e^{j\Omega})$$

2. Décalage en temps-fréquence

$$x(n - n_0) \Leftrightarrow e^{-jn_0\Omega} X(e^{j\Omega})$$

$$x(n)e^{jn\Omega_0} \Leftrightarrow X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$$

3. Dérivation en fréquence

$$n.x(n) \Leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

Propriétés de la transformée de Fourier

5. Produit de convolution

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1(i) * x_2(n - i) \Rightarrow X_1(e^{j\Omega}) \cdot X_2(e^{j\Omega})$$

6. Théorème du fenêtrage (ou de la modulation)

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Theta}) \cdot X_2(e^{j(\Omega-\Theta)}) d\Theta$$

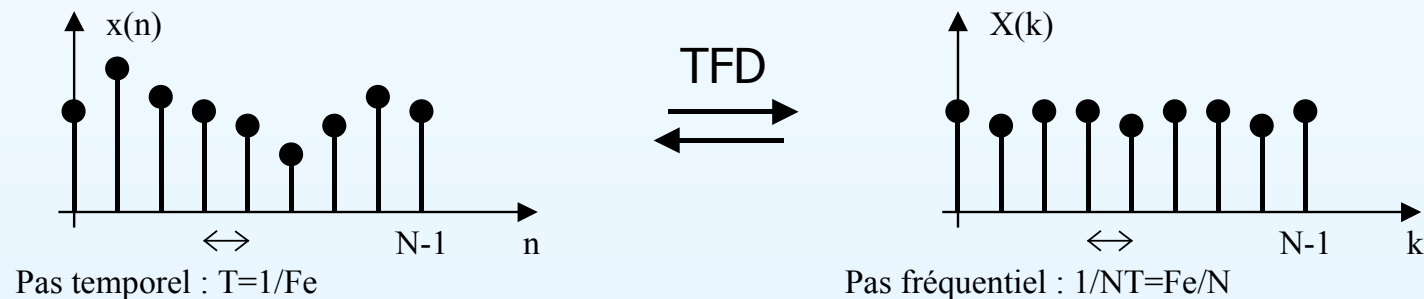
7. Théorème de Parseval (conservation de la puissance)

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x(i)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

Transformée de Fourier discrète (TFD)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (18)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (19)$$



- Calcul rapide (*Fast Fourier Transform, FFT*)

5 Systèmes discrets

Représentation temporelle

Stratégie générale d'analyse d'un système linéaire invariant :

1. Décomposition du signal d'entrée en une somme de signaux ou fonctions de base.

$$e(n) = \sum_k \alpha_k e_k(n)$$

2. Etude de la réponse du système pour l'ensemble des fonctions de base.

$$s_k(n) = \mathcal{T}[e_k(n)]$$

3. Recomposition de la sortie en appliquant le principe de superposition.

$$s(n) = \sum_k \alpha_k s_k(n)$$

Produit de convolution

$$e(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)$$

$$s(n) = \mathcal{T}[e(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)]$$

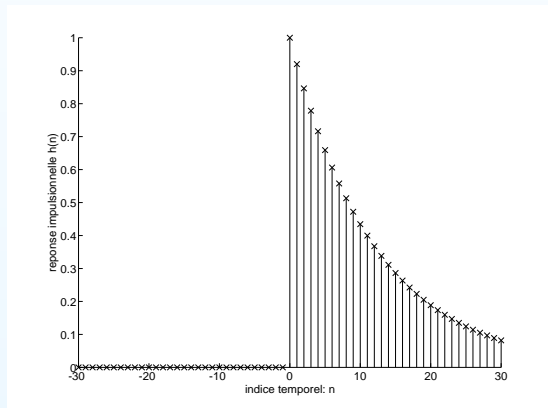
On pose $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$, alors

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) = e(n) * h(n) = h(n) * e(n)$$

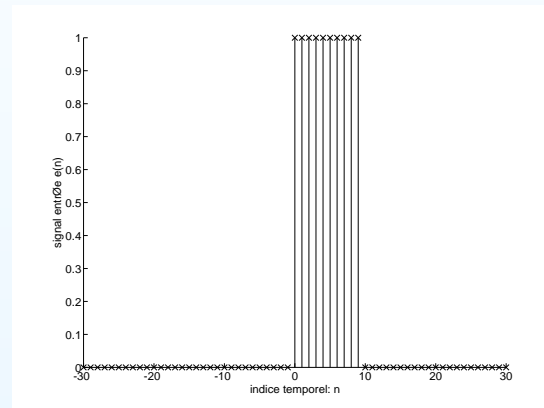
Un système discret est donc entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle* $h(n)$. L'opération $*$ liant la sortie $s(n)$ à l'entrée $e(n)$ et à la réponse impulsionnelle du système $h(n)$ est appelée produit de convolution.

Produit de convolution – 2

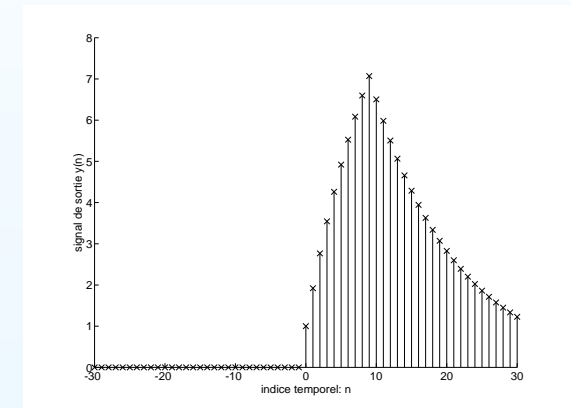
Exemple



$h(n)$: réponse impulsionnelle



$e(n)$: entrée du système



$s(n)$: réponse du système à l'entrée

Equation aux différences finies

Une équation aux différences finies peut s'écrire sous la forme :

$$s(n) = - \sum_{k=1}^N a_k s(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k e(n-k) \quad (20)$$

- Système *récuratif* ou *non-récuratif*
- Réponse impulsionnelle infinie (RII ou *IIR*) ou finie (RIF ou *FIR*)

Fonction de transfert en z

La fonction de transfert en z $H(z)$ d'un système est définie par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \quad (21)$$

$H(z)$ est également la transformée en Z de la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.

À partir de l'équation aux différences (20), on obtient :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (22)$$

Représentation fréquentielle

Soit l'entrée $e(n) = e^{jn\omega T} = e^{jn\Omega}$ pour $-\infty < n < +\infty$ d'un SLI de réponse impulsionnelle $h(k)$. La sortie peut alors s'écrire :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(n-k)\Omega} = e^{jn\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\Omega}$$

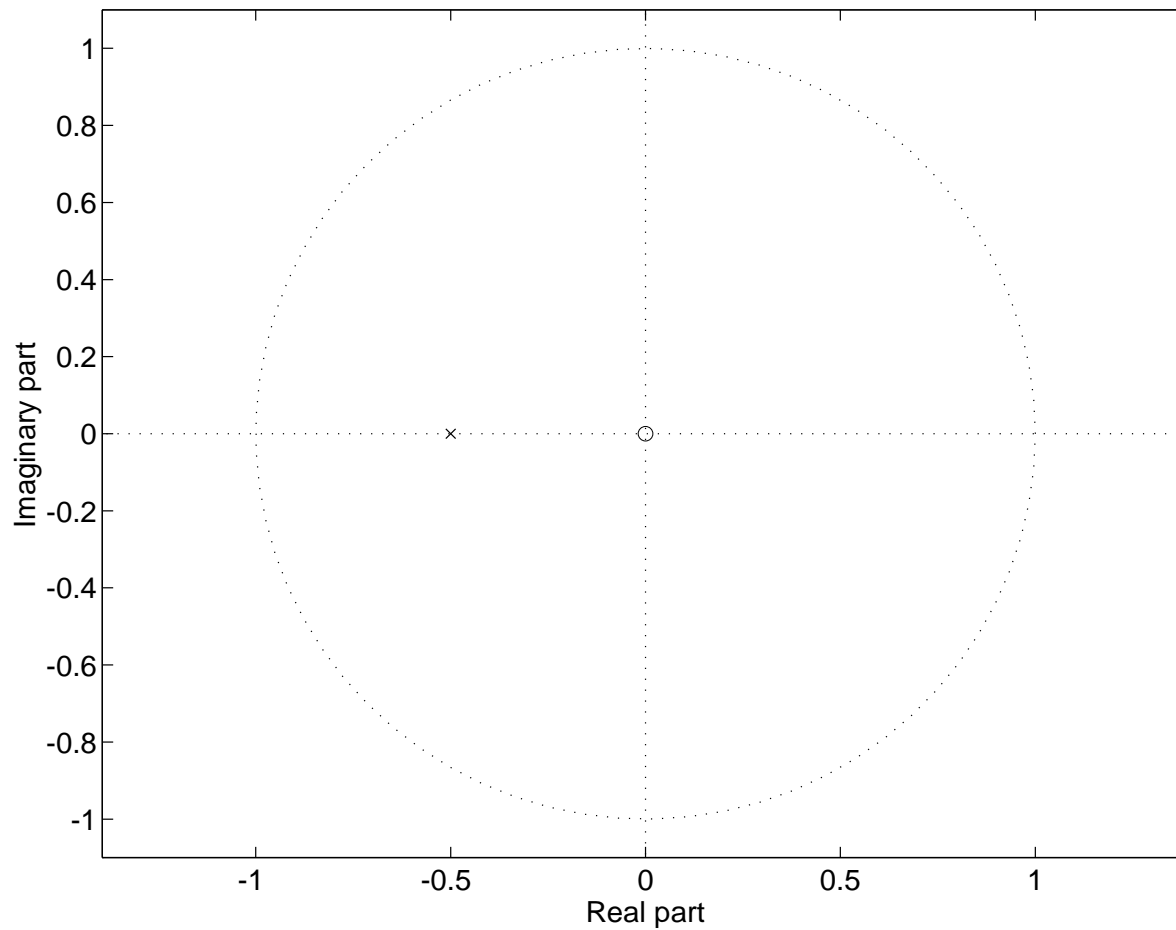
$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\Omega}$$

$H(e^{j\Omega})$ est appelé *réponse fréquentielle* du système. On étudie son module et sa phase :

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{j \arg[H(e^{j\Omega})]}$$

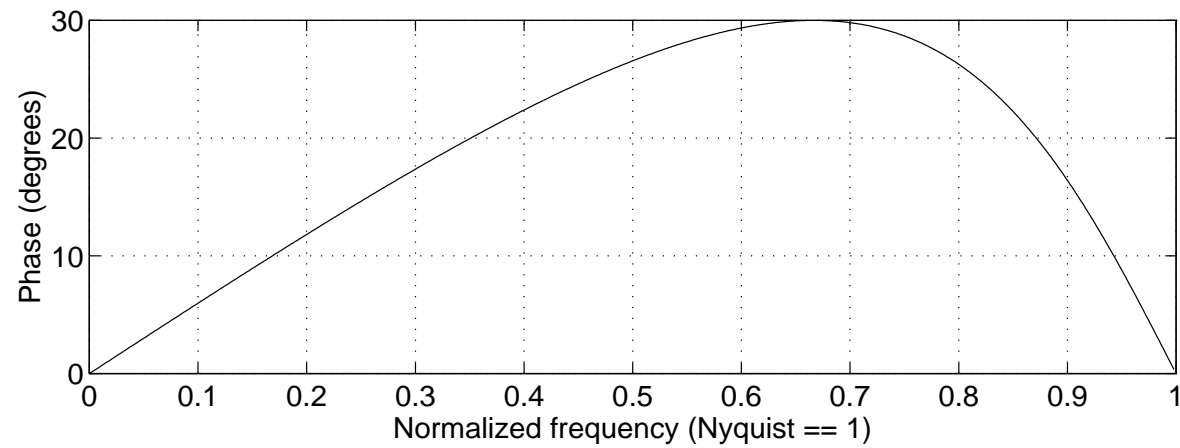
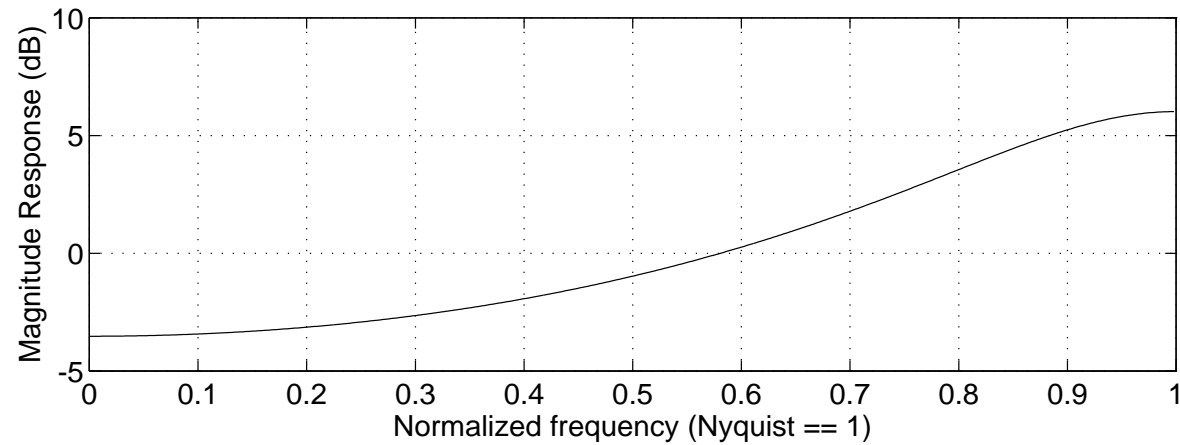
Représentation fréquentielle – 2

Exemple : $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}$



Représentation fréquentielle – 2

Exemple : $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}$



6 Filtrage numérique

Filtrage numérique

Modification des réponses temporelles et fréquentielles d'un signal discret

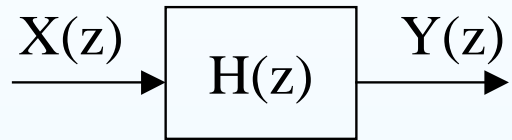
Un filtre numérique est défini par :

- sa réponse impulsionnelle ;
- sa fonction de transfert en z ;
- son équation aux différences finies ;
- sa réponse fréquentielle.

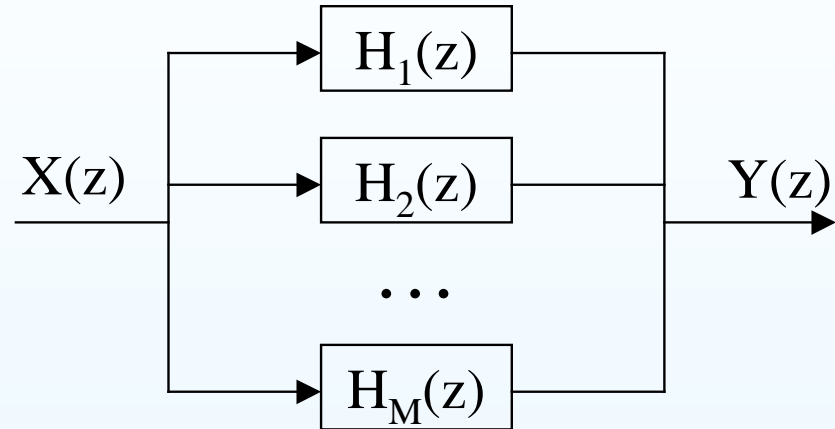
Deux principales classes :

- filtre RIF ;
- filtre RII.

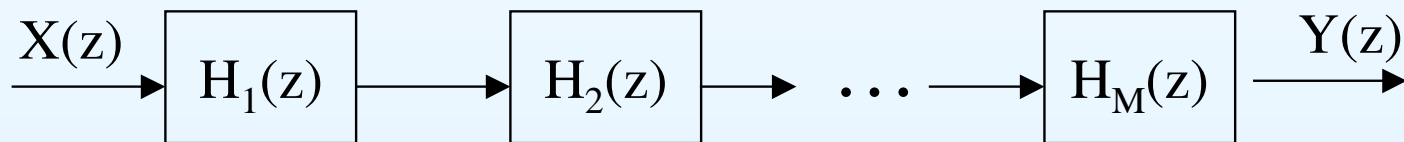
Fonction de transfert en z



a) Forme directe



b) Forme parallèle



c) Forme cascade

FIG. 1 — Représentations en fonction de transfert en z

Spécification

Gabarit défini par sa sélectivité, son ondulation en BP, son atténuation en BA

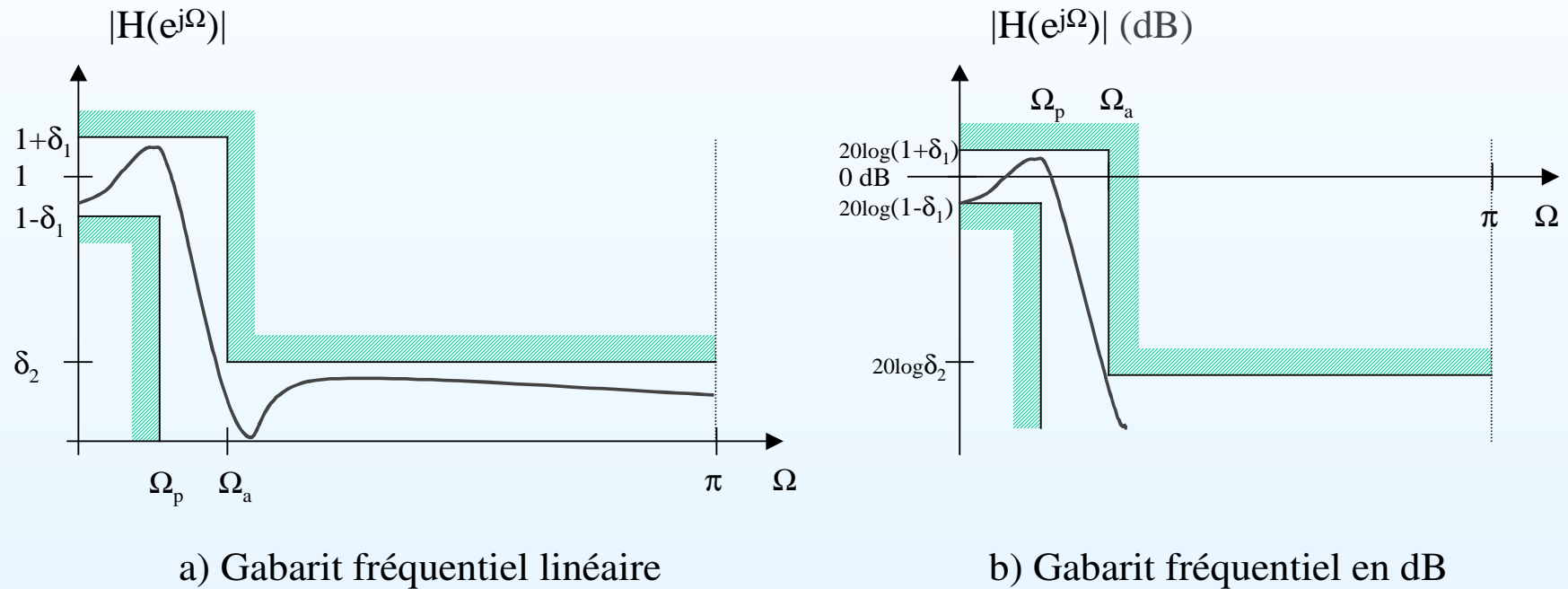


FIG. 2 – Gabarit fréquentiel d'un filtre passe-bas

Filtres RII

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{-i}} \quad (23)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot x(n - i) - \sum_{i=0}^N a_i \cdot y(n - i) \quad (24)$$

Principales caractéristiques des filtres RII :

1. une bande de transition qui peut être étroite ;
2. une instabilité potentielle due à des pôles situés en dehors du cercle unité (i.e. $\exists i, |p_i| \geq 1$;
3. une instabilité numérique (i.e. après quantification des coefficients et du signal).

Filtres RIF

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot z^{-i} \quad (25)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot x(n-i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot x(n-i) \quad (26)$$

Principales caractéristiques des filtres RIF :

1. une bande de transition plus large ;
2. des méthodes de synthèse efficaces ;
3. une stabilité inhérente ($\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| < \infty$) ;
4. une meilleure stabilité numérique que les RII ;
5. une phase qui peut être exactement linéaire.

Structures des filtres RIF

Graphe flot de signal dérivé de l'équation aux différences finies

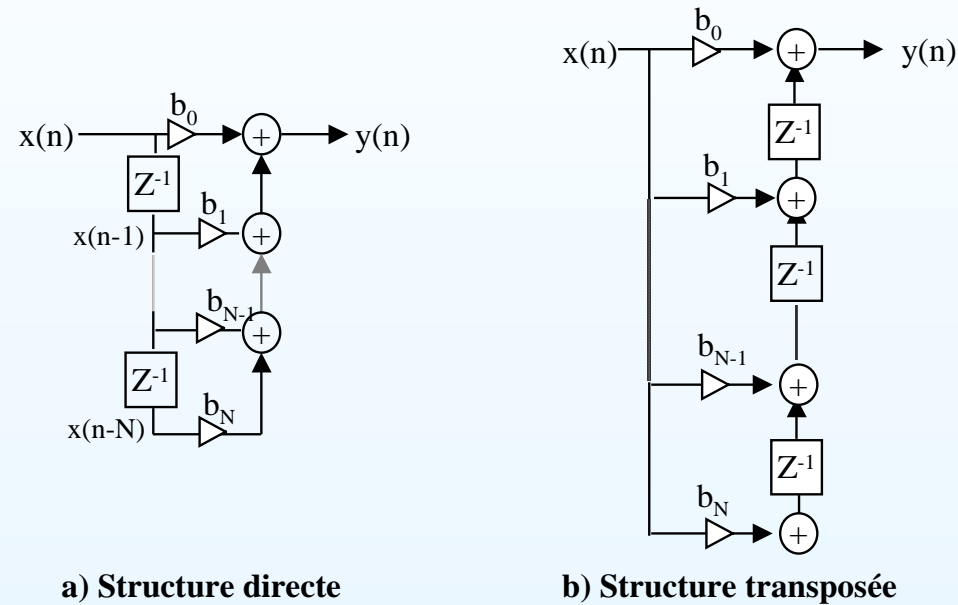
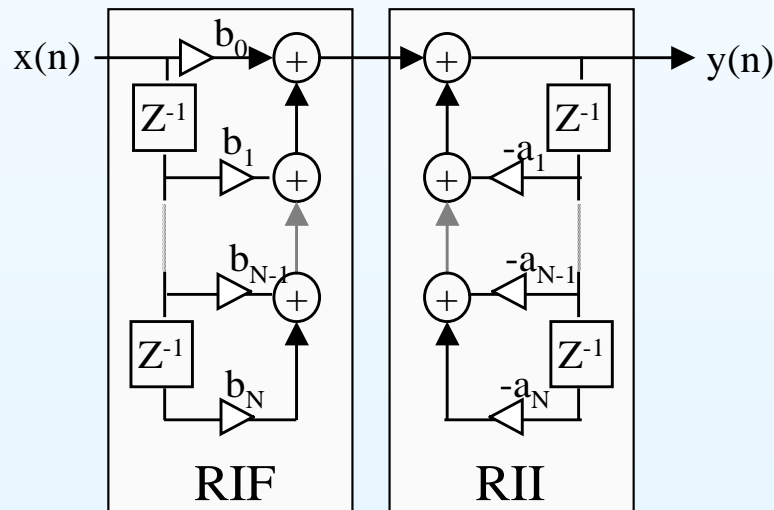


FIG. 3 – Structures des filtres RIF

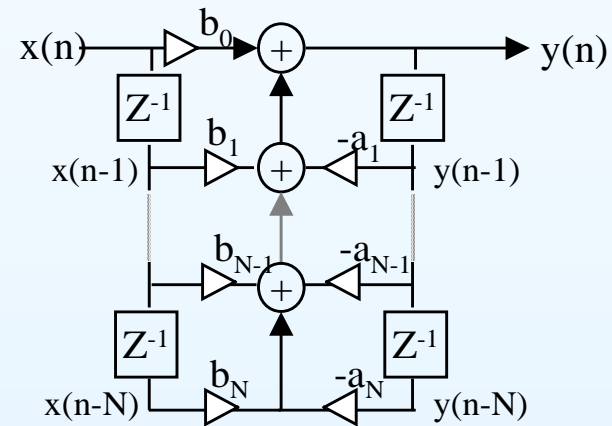
$$P_{calcul} (MMACS) > (N + 1) \cdot F_e / 10^6 \quad (27)$$

Structures des filtres RII

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = [N(z)] \times \left[\frac{1}{D(z)} \right] = \left[\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i} \right] \times \left[\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{-i}} \right] \quad (28)$$



a) Cascade

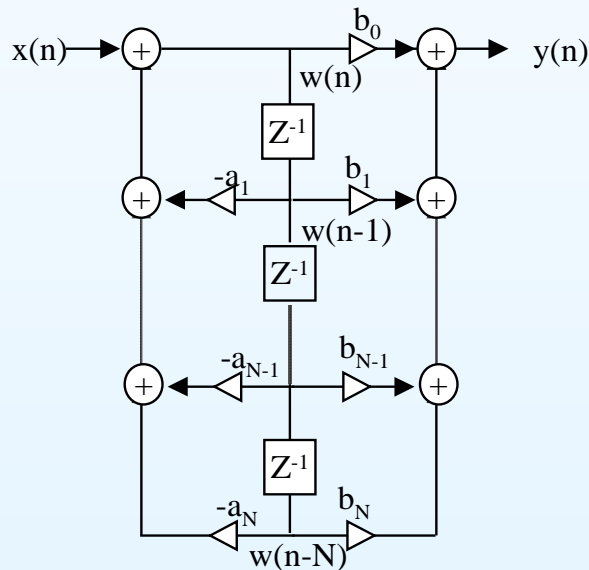


b) Structure directe

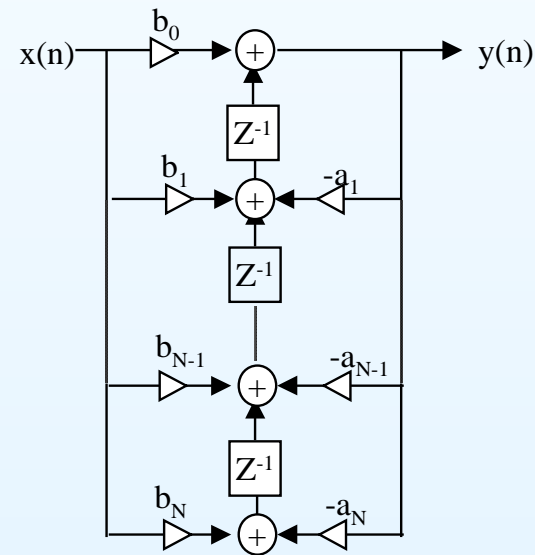
FIG. 4 – Structures directes des filtres RII

Structures des filtres RII – 2

$$\begin{cases} W(z) = \frac{1}{D(z)} \cdot X(z) \\ Y(z) = N(z) \cdot W(z) \end{cases} \begin{cases} w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i \cdot w(n-i) \\ y(n) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot w(n-i) \end{cases} \quad (29)$$



a) Structure canonique directe



b) Structure canonique transposée

FIG. 5 – Structures canoniques des filtres RII

7 Transformée de Fourier rapide (FFT)

Transformée de Fourier rapide (FFT)

La transformation de Fourier rapide (TFR), ou encore *Fast Fourier Transform* (FFT), est directement issue d'une réorganisation du calcul des matrices de la transformée de Fourier discrète (TFD).

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} \quad (30)$$

avec $W_N = e^{(-2j\frac{\pi}{N})}$

FFT Decimation in Time (DIT)

$$X(k) = \sum_{n \text{ pair}} x(n).W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impair}} x(n).W_N^{nk} \quad (31)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n).W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1).W_N^{(2n+1)k} \quad (32)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n).W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1).W_{N/2}^{nk} \quad (33)$$

$$X(k) = G(k) + W_N^k.H(k) \quad (34)$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = G(k) - W_N^k.H(k) \quad (35)$$

où $G(k)$: TFD sur les $N/2$ points d'indices pairs,

$H(k)$: TFD sur les $N/2$ points d'indices impairs.

FFT Decimation in Time (DIT) – 2

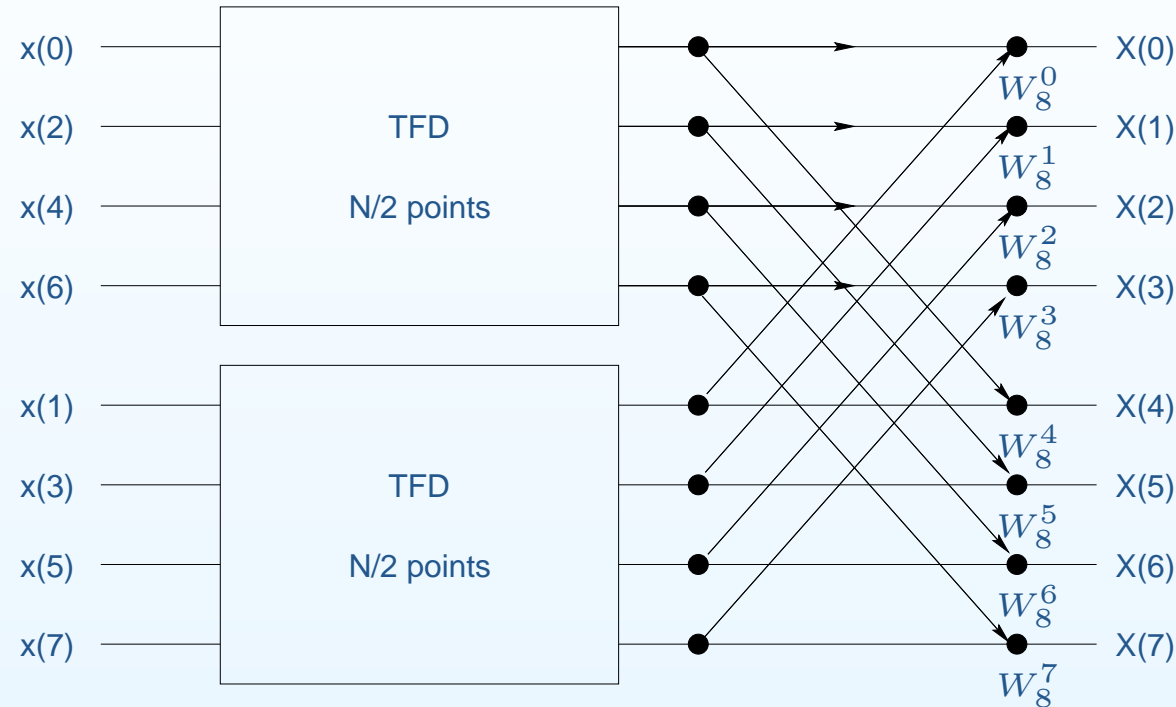


FIG. 6 – Décomposition DIT de la TFD

- $\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplications de nombres complexes
- $N \log_2 N$ additions/soustractions de nombres complexes

FFT Decimation in Time (DIT) – 3

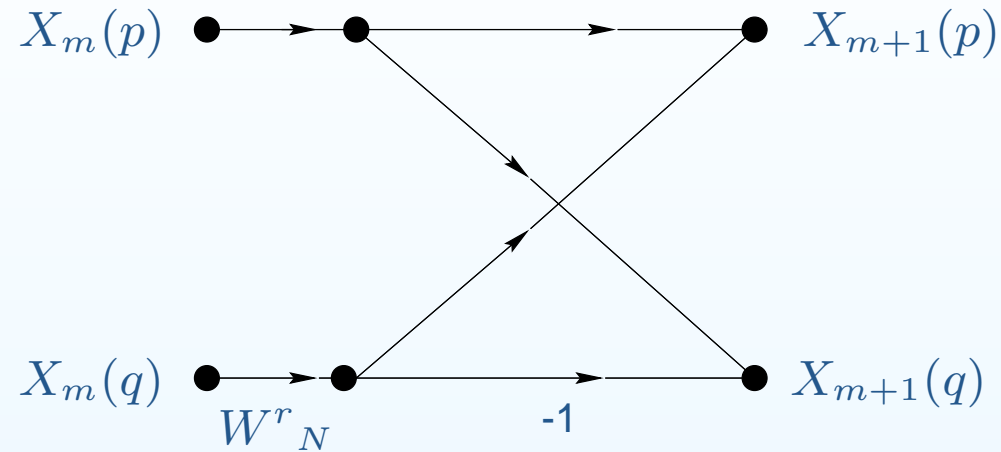


FIG. 7 – Papillon DIT de la TFR

$$\begin{cases} X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r \cdot X_m(q) \\ X_{m+1}(q) = X_m(p) - W_N^r \cdot X_m(q) \end{cases} \quad (36)$$

FFT Decimation in Time (DIT) – 4

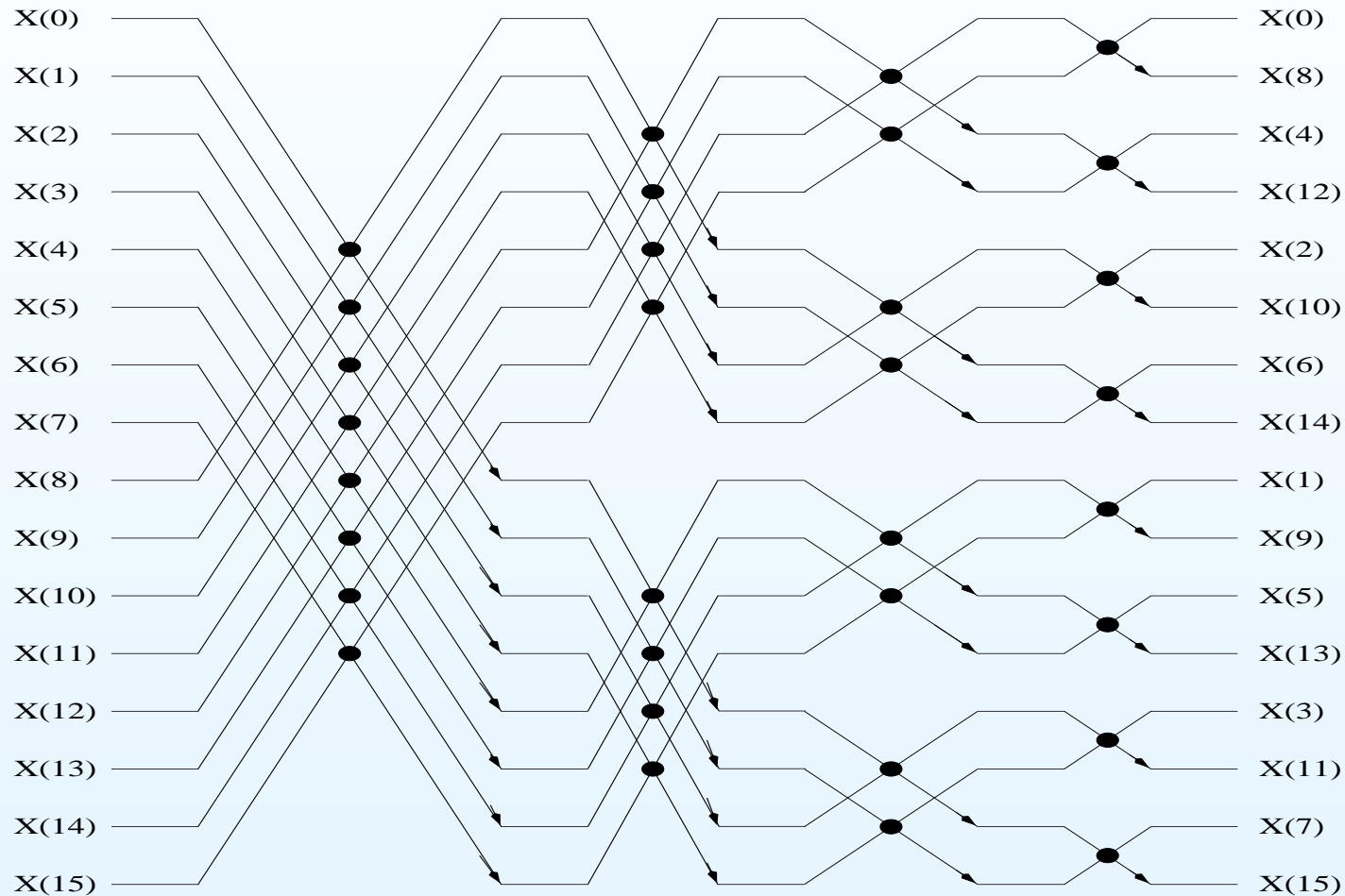


FIG. 8 – Graphe d'une FFT DIT sur 16 échantillons

Autres graphes

- Decimation in Frequency (DIF)
- Radix 4, ...
- Géométrie constante
- ...

8 Filtrage adaptatif

Filtrage adaptatif

- Pas de connaissance a priori des propriétés des signaux et systèmes aléatoires traités
- Le filtre «optimal» se construit au fur et à mesure de l'arrivée des échantillons
- Les coefficients du filtre s'adaptent selon un critère d'erreur
- Convergence vers le filtre «optimal»

- Égalisation, codage, annulation d'écho, caractérisation ou extraction d'informations, filtrage et réduction de bruit

Annulation d'écho acoustique

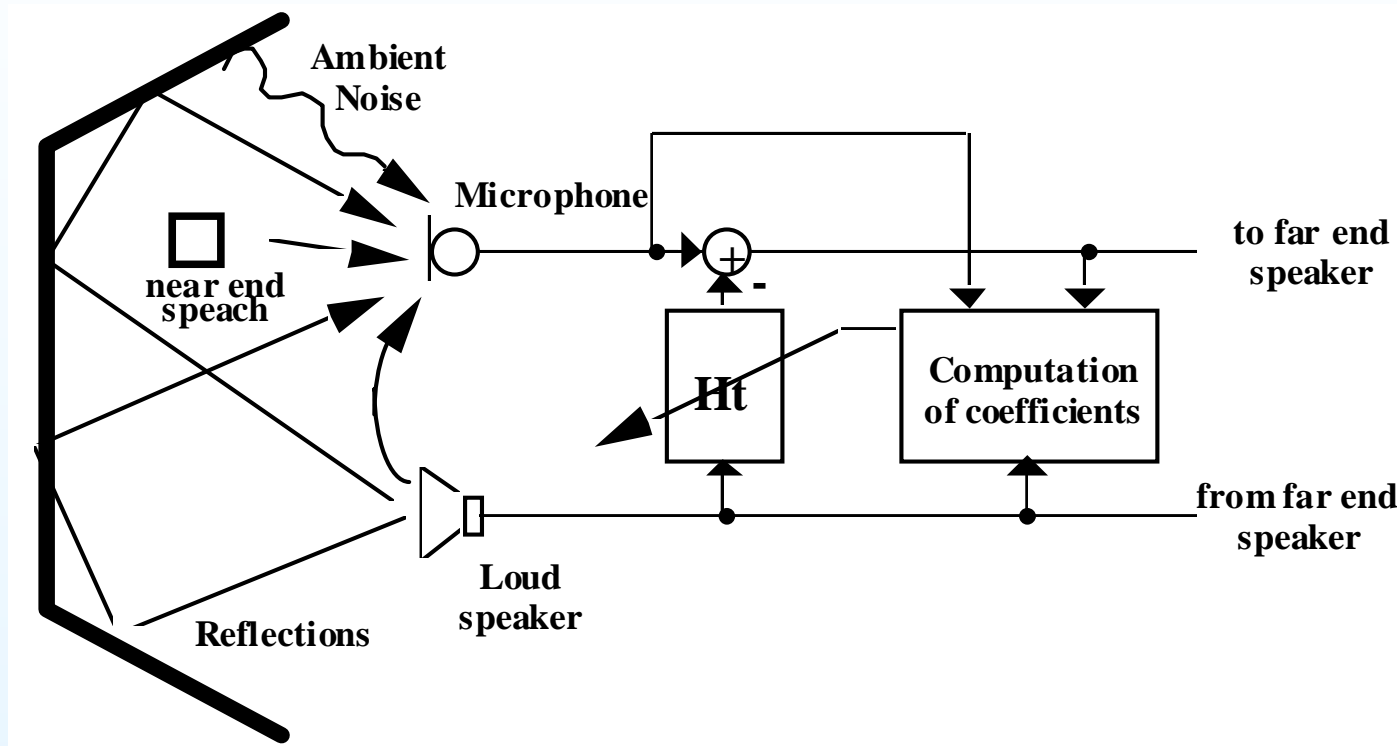


FIG. 9 – Annulation d'écho acoustique

Algorithme du gradient stochastique

- Minimise l'erreur quadratique entre le filtre et son optimal : Least Mean Square (LMS)
- Minimisation de la fonction d'erreur par la méthode du gradient stochastique

Filtrage :

$$y_n = U_n^T W_{n-1}$$

Erreur :

$$\epsilon_n = y_n - \hat{y}_n$$

Gradient :

$$W_n = W_{n-1} + \mu_n \epsilon_n U_n$$

9 Quantification et arithmétique entière

Bruit d'une conversion analogique/numérique

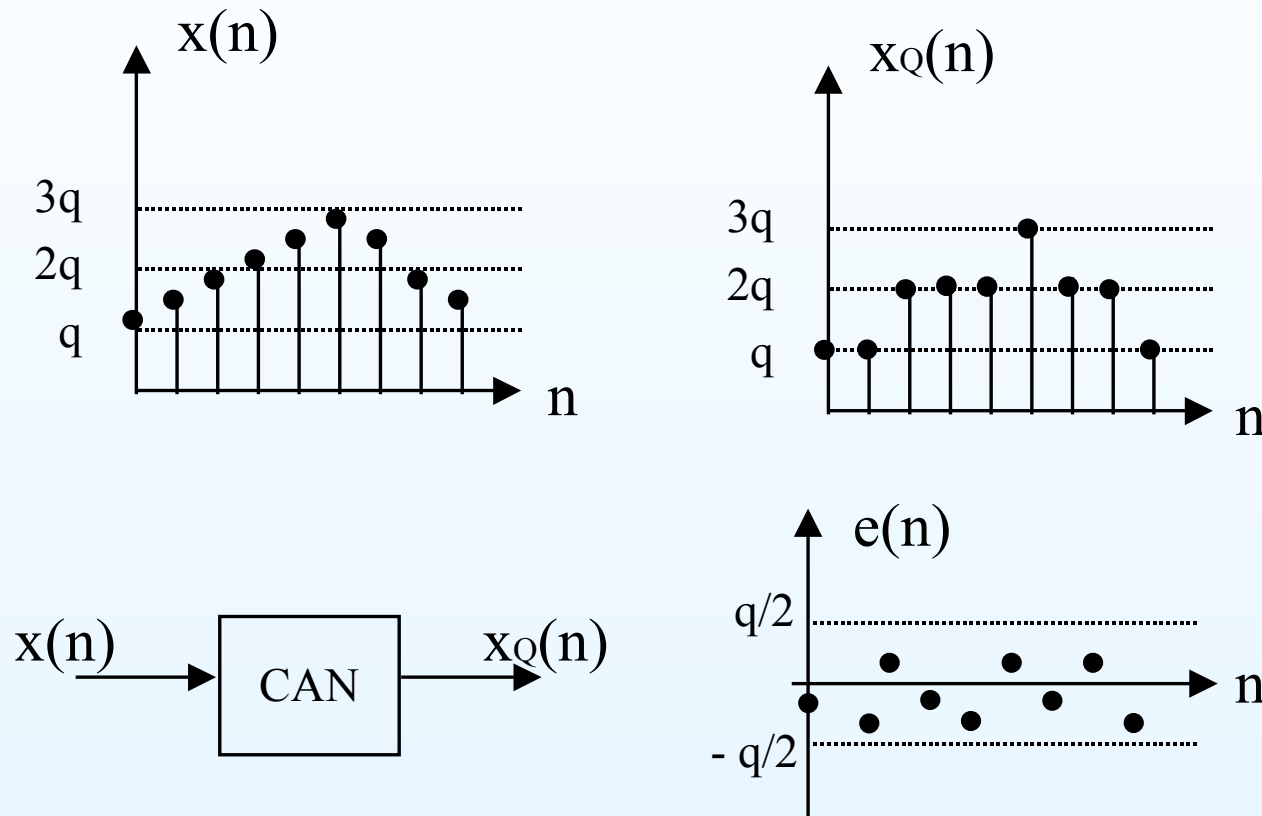
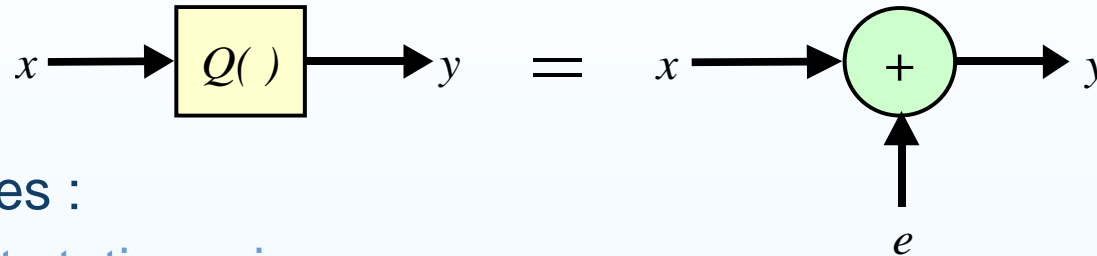


FIG. 10 – Bruit de conversion analogique numérique

Modèle du bruit de quantification



- Hypothèses :
 - $e(n)$ est stationnaire,
 - $e(n)$ n'est pas corrélé avec $x(n)$,
 - les bruits de quantification sont statistiquement indépendants,
 - $e(n)$ est un bruit blanc uniformément réparti,
 - $e(n)$ est borné par le pas de quantification,
 - la distribution de probabilité de $e(n)$ est uniforme,
 - l'ergodicité implique que les moyennes temporelles et statistiques sont équivalentes.
- Selon la loi de quantification utilisée :
 - arrondi : $m_e = 0$, $\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$,
 - troncature : $m_e = \frac{q}{2}$, $\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$.

Modèles du bruit (dus aux calculs)

$$X_e = -2^m \cdot S + \sum_{-n}^{m-1} b_i 2^i, \quad X_s = -2^m \cdot S + \sum_{-j}^{m-1} b_i 2^i \quad (37)$$

X_s est le résultat de la quantification de X_e , i.e. $X_s = Q[X_e]$

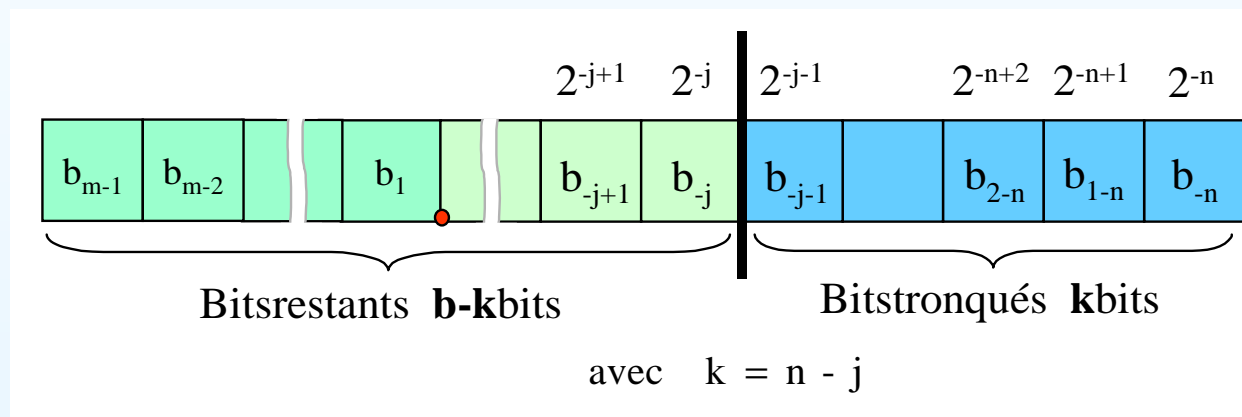


FIG. 11 — Représentation des données lors d'une troncature

L'expression du bruit de quantification correspondant à la différence entre les deux variables X_e et X_s , est la suivante : $b_g = \sum_{i=j-1}^n b_{-i} 2^{-i}$

Modèles du bruit – 2

$$p(x_q) = \sum_{i=0}^{2^k-1} 2^{-k} \delta(x_q - i \cdot 2^{-n}) \quad (38)$$

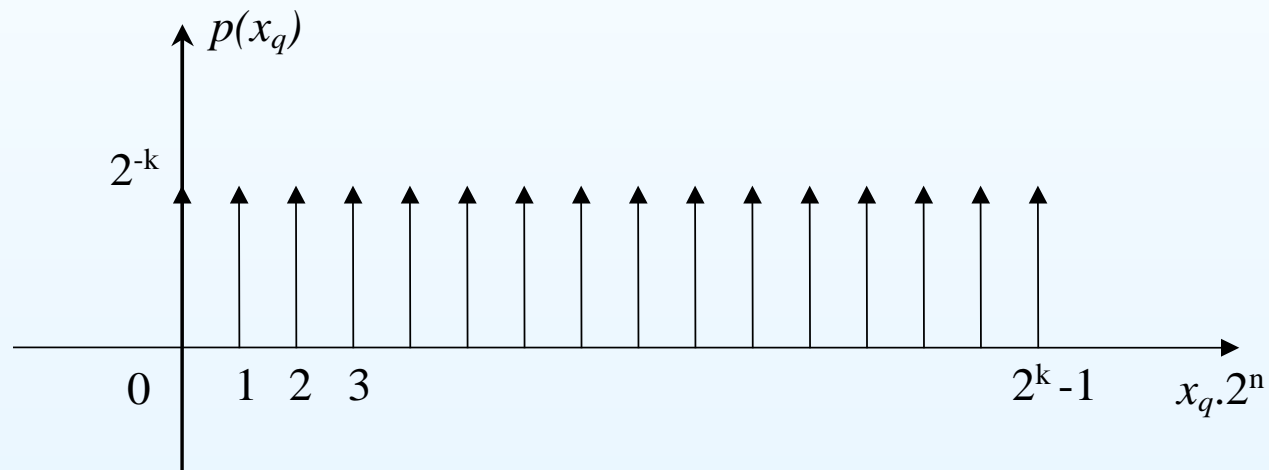


FIG. 12 — Fonction de distribution du bruit généré lors d'une troncature

Modèles du bruit – 3

La moyenne de cette variable aléatoire est la suivante :

$$\mu_{b_g} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y_i p(y_i) = \sum_{i=0}^{2^k-1} i \cdot 2^{-n} \cdot 2^{-k} \quad (39)$$

soit

$$\mu_{b_g} = 2^{-j-1} (1 - 2^{j-n}) = \frac{q}{2} (1 - 2^{-k}) \quad (40)$$

La variance de cette variable aléatoire est égale à :

$$\sigma_{b_g}^2 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y_i^2 p(y_i) - \mu_{b_g}^2 \quad (41)$$

soit

$$\sigma_{b_g}^2 = \frac{2^{-2j}}{12} (1 - 2^{2(j-n)}) = \frac{q^2}{12} (1 - 2^{-2k}) \quad (42)$$

Modèles du bruit – 4

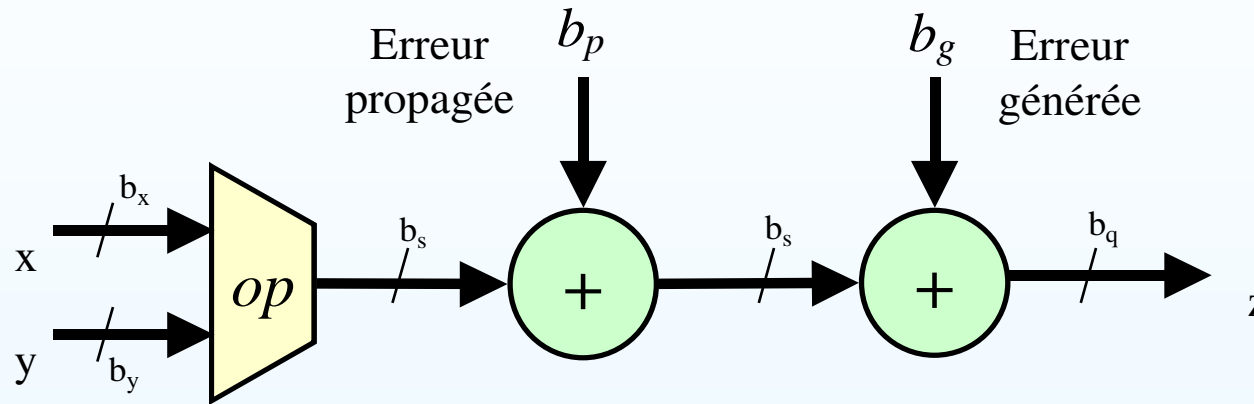


FIG. 13 – Modélisation du bruit de calcul

- Propagation des bruits dans le graphe
- ...

Filtrage d'un bruit de quantification

$$RSB = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_x^2}{q^2/12} = 12 \times 2^{2(b-1)} \sigma_x^2 \quad (43)$$

$$RSB_{dB} = 10 \log RSB = 6.02 \times b + 4.77 \times 10 \log \sigma_x^2 \quad (44)$$

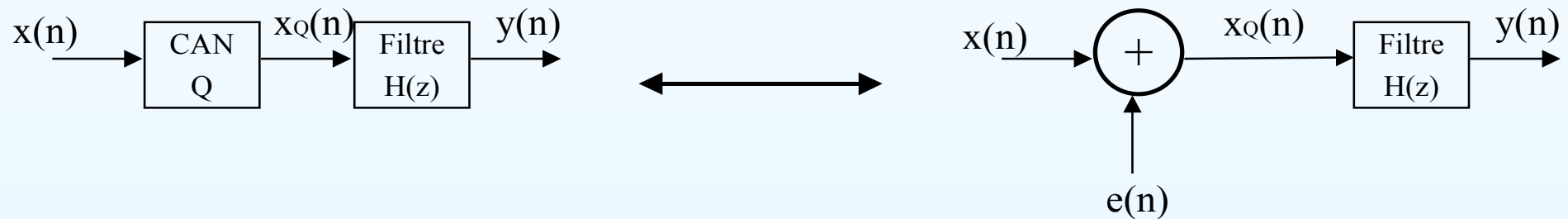


FIG. 14 — Filtrage d'un bruit de quantification

Filtrage d'un bruit de quantification – 2

En sortie du filtre, si on considère que le filtre ne génère pas de bruit, on aura alors :

$$y(n) = x(n) * h(n) + e(n) * h(n) = x(n) * h(n) + f(n) \quad (45)$$

où $f(n)$ est le bruit de quantification en sortie du filtre. On définit alors les moyennes m_f et puissance du bruit σ_f^2 du bruit $f(n)$:

$$m_f = m_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) = m_e H(e^{j0}) \quad (46)$$

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (47)$$

Effets de la quantification

Filtrage RIF $H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x_{n-i}$

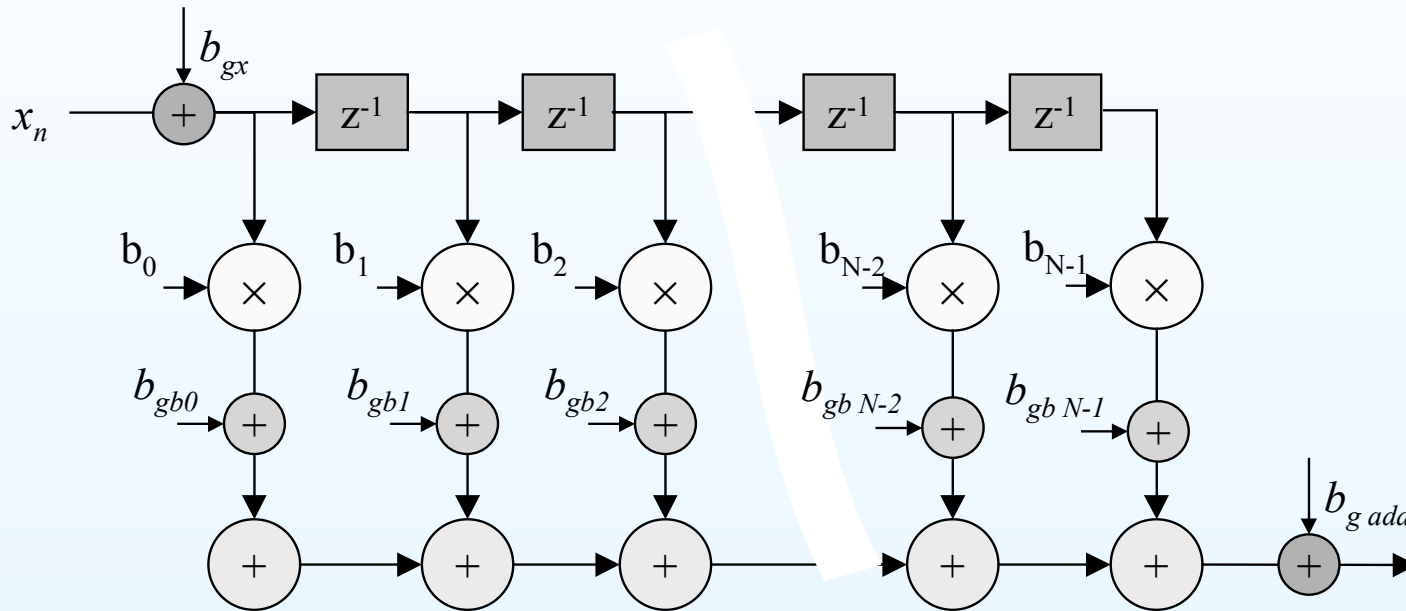


FIG. 15 – Bruits de quantification dans un filtre RIF

- b_{gx} représente le bruit en entrée du filtre associé au signal $x(n)$.
- b_{gbi} représente le bruit généré par les multiplications.
- b_{gadd} représente le bruit généré par le changement de format en sortie du filtre.

Effets de la quantification – 2

Bruit en sortie du filtre RIF pour une architecture simple
précision

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 + N \frac{q^2}{12} \quad (48)$$

Bruit en sortie du filtre RIF pour une architecture double
précision

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 + \frac{q^2}{12} \quad (49)$$

Débordement du filtre RIF

$$|y(n)| \leq x_{max} \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| \quad (50)$$

Effets de la quantification – 3

Filtrage RII du second ordre

Pour plus d'informations...

Références

- [Bel87] M. Bellanger. *Traitement Numérique du Signal*. Collection CNET-ENST, MASSON, 1987.
- [EW92] Van Den Enden and Werdeckh. *Traitement Numérique du Signal : Une Introduction*. Masson, 1992.
- [HL97] D. Hanselman and B. Littlefield. *Matlab : the language of technical computing*. Prentice Hall, 1997.
- [Ka91] M. Kunt and al. *Techniques modernes de Traitement Numérique du Signal*. Collection CNET-ENST, Presses Romandes, Masson, 1991.
- [ME93] C. Marven and G. Ewers. *a simple approach to Digital Signal Processing*. Texas Instruments Mentors, 1993.

Pour plus d'informations...

Références

- [MSY98] J. McClellan, R. Schafer, and M. Yoder. *DSP First : a Multimedia Approach*. Prentice Hall, 1998.
- [OS75] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, 1975.
- [OS99] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing, second edition*. Prentice-Hall, 1999.
- [PM96] J. Proakis and D. Manolakis. *Digital Signal Processing : Principles, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, 1996.
- [Poa97] B. Poart. *A Course in Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, 1997.
- [SS88] R. David S. Stearns. *Signal Processing Algorithms*. Prentice Hall, 1988.

Pour plus d'informations...

Olivier.Sentieys@enssat.fr

<http://lasti.enssat.fr/GroupeArchi/enseignements/Tns>

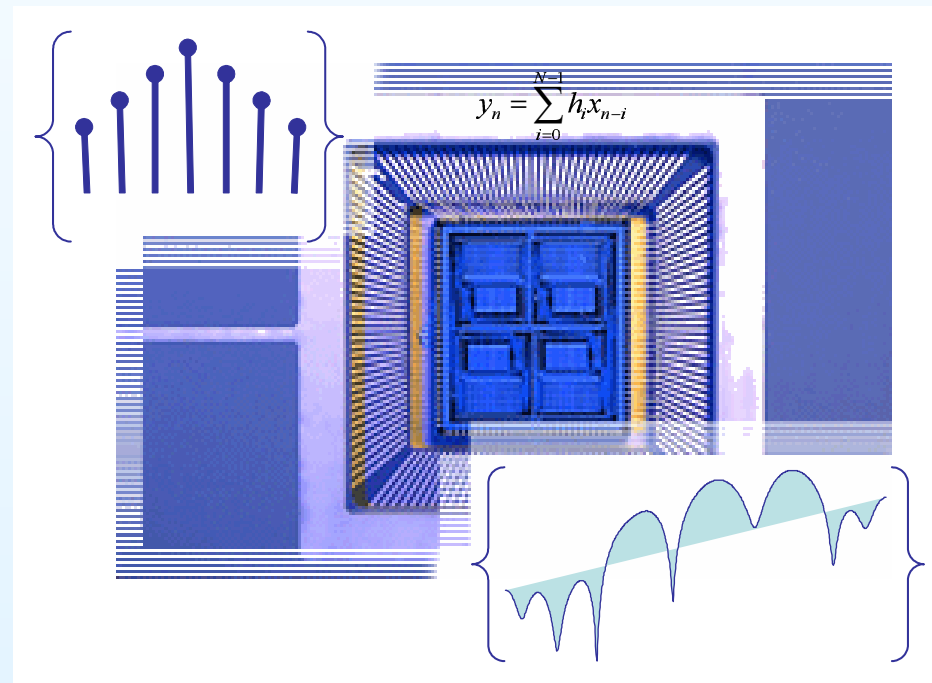


Table des matières

Table des matières

1	Échantillonnage et reconstruction des signaux	8
2	Signaux à temps discret	15
3	Transformée en Z	22
4	Transformée de Fourier d'un signal discret	27
5	Systèmes discrets	38
6	Filtrage numérique	46
7	Transformée de Fourier rapide (FFT)	55
8	Filtrage adaptatif	62
9	Quantification et arithmétique entière	66